

Homologie polygraphique

Léonard Guetta

12/03/2026

1 Introduction

Il y a deux façons standard d'associer des groupes d'homologie à une petite catégorie C .

1. **Par l'algèbre homologique :** On considère les catégories $\mathbf{Mod}_C := \underline{\mathbf{Hom}}(C^{\text{op}}, \mathbf{Ab})$ et ${}_C\mathbf{Mod} := \underline{\mathbf{Hom}}(C, \mathbf{Ab})$ des C -modules à droite et à gauche respectivement, ainsi que le foncteur produit tensoriel total

$$\begin{aligned} - \otimes_{\mathbb{Z}C} - : \mathbf{Mod}_C \times {}_C\mathbf{Mod} &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ (F, G) &\longmapsto \int^{c \in C} F(c) \otimes_{\mathbb{Z}} G(c), \end{aligned}$$

où $\int^{c \in C}$ désigne la “cofin”. Ce foncteur est exact à droite en chaque variable et donc dérivable à gauche en chaque variable. On définit alors *l'homologie de C à coefficient dans un C -module à droite F comme étant*

$$\begin{aligned} H(C, F) &:= F \otimes_{\mathbb{Z}C}^{\mathbb{L}} \underline{\mathbb{Z}} \\ & (= : \text{Tor}^{\mathbb{Z}C}(F, \underline{\mathbb{Z}})), \end{aligned}$$

où $\underline{\mathbb{Z}}$ est le C -module à gauche constant de valeur $\mathbb{Z}$. (On aurait pu définir de manière symétrique l'homologie à coefficient dans un C -module à gauche.) Pratiquement, on doit prendre une résolution projective

$$\underline{\mathbb{Z}} \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \cdots$$

de C -modules à gauche et l'homologie $H(C, P)$ est l'homologie du complexe de chaînes

$$F \otimes_{\mathbb{Z}C} P_{\bullet}.$$

2. **Par les méthodes simpliciales :** À toute petite catégorie C , on associe fonctoriellement un ensemble simplicial $N(C)$ (le nerf de C) dont l'ensemble des n -simplexes est l'ensemble des n -chaînes de C

$$N_n(C) = \{x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} x_2 \cdots x_n \mid x_i \in \text{Ob}(C), f_i \in \text{Fl}(C)\}.$$

On a, par ailleurs, un foncteur

$$\kappa : \widehat{\Delta} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}$$

de la catégorie des ensembles simpliciaux vers la catégorie des complexes de chaînes en degrés positifs, défini de la manière suivante. Pour X un ensemble simplicial, $\kappa_n(X)$ est le groupe abélien libre sur les n -simplexes

$$\kappa_n(X) = \mathbb{Z}X_n,$$

et la différentielle $\partial: \kappa_{n+1}(X) \rightarrow \kappa_n(X)$ est définie par la formule habituelle

$$\partial(x) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i(x).$$

On définit l'homologie “simpliciale” de C comme l'homologie du complexe de chaînes $\kappa N(C)$

$$H^{\text{simp}}(C) := H(\kappa N(C)).$$

Ces deux approches sont reliées par le théorème standard suivant.

Théorème 1. *Pour toute petite catégorie C , on a un isomorphisme (naturel)*

$$H(C, \mathbb{Z}) \simeq H^{\text{simp}}(C)$$

entre l'homologie simpliciale de C et l'homologie de C à coefficient constant $\mathbb{Z}$.

Remarque 1. Il existe également des versions “tordues” de l'homologie simpliciale et on peut étendre l'isomorphisme du théorème précédent pour inclure des coefficients F sur C .

Le premier but de cet exposé est d'introduire une troisième manière d'associer des groupes d'homologie à une petite catégorie

3. **Par l'homologie polygraphique.** L'idée est ici de “résoudre la catégorie C ” en utilisant des ω -catégories strictes.

2 “Crash course” sur les ω -catégories strictes

2.1 Définitions de base

Ci-dessous, deux définitions (équivalentes) des ω -catégories strictes. La première tient en quelques lignes mais n'est pas très éclairante, et la deuxième est plus terre à terre mais un peu plus longue.

Définition 1 (ω -catégorie). On définit la catégorie $0\mathbf{Cat}$ des 0-catégories comme étant la catégorie des ensembles, et pour tout $n \geq 0$, on définit la catégorie $(n+1)\mathbf{Cat}$ des $(n+1)$ -catégories (strictes) comme la catégorie des catégories enrichies en $n\mathbf{Cat}$ munie du produit cartésien.

Enfin, on définit la catégorie $\omega\mathbf{Cat}$ des ω -catégories (strictes) comme la limite projective suivante

$$\omega\mathbf{Cat} = \varprojlim (\cdots 2\mathbf{Cat} \rightarrow 1\mathbf{Cat} \rightarrow 0\mathbf{Cat}),$$

où $1\mathbf{Cat} \rightarrow 0\mathbf{Cat}$ est le foncteur “ensemble des objets sous-jacents” et $(n+1)\mathbf{Cat} \rightarrow n\mathbf{Cat}$ est défini par récurrence en utilisant le foncteur précédent “hom à hom”.

Pratiquement, on utilise plutôt la définition ci-dessous.

Définition 2 (ω -catégorie bis). Commençons par la partie “structure”. Une ω -catégorie C a pour structure sous-jacente:

1. un diagramme dans $\mathbf{Ens}$

$$G_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xleftarrow{1} \rightarrow \\ \xleftarrow{t} \end{array} G_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xleftarrow{1} \rightarrow \\ \xleftarrow{t} \end{array} G_2 \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xleftarrow{1} \rightarrow \\ \xleftarrow{t} \end{array} \cdots,$$

tel que

$$\begin{cases} tt = ts \\ ss = st \\ s(1_x) = t(1_x) = x. \end{cases}$$

Pour tout $n > k$, on définit par récurrence $s_k, t_k: C_n \rightarrow C_k$ les opérations de sources et buts itérés, ainsi que $1_-^n: C_k \rightarrow C_n$ l'opération d'unité itérée.

2. pour tout $n > k$, une opération de composition

$$\begin{aligned} C_n \times_{C_k} C_n &\rightarrow C_n \\ (x, y) &\mapsto x *_i y, \end{aligned}$$

où $C_n \times_{C_k} C_n$ est l'ensemble des paires de n -flèches (x, y) tels que $s_k(x) = t_k(y)$.

Les axiomes sont alors les suivants:

1. (associativité) $(x *_i y) *_i z = x *_i (y *_i z)$,
2. (unité) $x *_i 1_{s_i(x)}^n = 1_{t_i(x)}^n *_i x = x$,
3. (fonctorialité des unités) $1_{x *_i y} = 1_x *_i 1_y$,
4. (loi d'échange) $(x *_i y) *_j (x' *_i y') = (x *_j x') *_i (y *_j y')$,

partout où ça a du sens.

Les morphismes de ω -catégories (on parle également de ω -foncteurs) sont définis de la manière évidente. Pour n fini, on identifie les n -catégories (strictes) avec les ω -catégories dont les k -flèches pour $k > n$ sont dégénérées (i.e. des unités sur des flèches de dimension au plus n). En particulier, on a foncteur d'inclusion canonique

$$\mathbf{Cat} \rightarrow \omega\mathbf{Cat}$$

de la catégorie des (petites) catégories vers la catégorie des ω -catégories strictes.

Remarque 2. Notons bien que dans la définition d' ω -catégorie, on n'impose *aucune* condition d'inversibilité sur les flèches supérieures. En particulier, les ω -catégories *ne sont pas des cas particulier d' ∞ -catégories à la Lurie!*

Définition 3. Pour $n > 0$, une n -flèche x d'une ω -catégorie C est dite *inversible* s'il existe une n -flèche $y: t(x) \rightarrow s(x)$ telle que

$$x *_n y = 1_{t(x)} \text{ et } y *_n x = 1_{s(x)}.$$

Une telle n -flèche y est alors nécessairement unique et est notée x^{-1} . On note $(\omega, k)\mathbf{Cat}$ la catégorie des ω -catégories strictes dont toutes les flèches de dimension $i > k$ sont inversibles. Pour $k = 0$, on utilise également la notation $\omega\mathbf{Grpd}$ et on parle d' ω -groupoïdes stricts.

Les ω -groupoïdes stricts sont notoirement célèbres à cause du fait bien connu suivant.

Proposition 2 (folklore). *La catégorie des ω -groupoïdes stricts ne satisfait **pas** à l'hypothèse d'homotopie. C'est-à-dire que la localisation de $\omega\mathbf{Grpd}$ relativement aux équivalences d' ω -groupoïdes¹ n'est pas équivalente à la catégorie des CW-complexes à équivalence d'homotopie près.*

¹définies en termes de "groupes d'homotopies" associés à tout ω -groupoïde

C'est cette limitation qui oblige à devoir considérer des ω -groupoïdes (et plus généralement des ω -catégories) dites *faibles*, c'est-à-dire où les axiomes sont remplacés par des cohérences, ces cohérences engendrant de nouvelles cohérences, elles-mêmes engendrant de nouvelles cohérences, et ainsi de suite *ad infinitum*.

Il semblerait que pour cette raison, l'étude des ω -catégories strictes est devenue assez marginale dans le paysage mathématique. Pourtant, elles ne sont pas dénuées d'intérêt comme nous allons le voir ci-dessous.

Slogan. *Il ne faut pas jeter les ω -catégories strictes avec l'eau du bain!*

2.2 Résolutions polygraphiques

Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathbb{D}_n$ la n -catégorie qui coreprésente le foncteur

$$\begin{aligned}\omega\mathbf{Cat} &\rightarrow \mathbf{Ens} \\ C &\mapsto C_n,\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{Cat}}(\mathbb{D}_n, C) \simeq C_n.$$

En dessin:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_0 &= \bullet, \\ \mathbb{D}_1 &= \bullet \rightarrow \bullet, \\ \mathbb{D}_2 &= \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \\ \mathbb{D}_3 &= \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \\ &\dots\end{aligned}$$

On note $\mathbb{S}^{n-1}$ la sous $(n-1)$ -catégorie de $\mathbb{D}_n$ obtenue en retirant l'unique n -flèche non dégénérée.

En dessin:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^{-1} &= \emptyset, \\ \mathbb{S}^0 &= \bullet \quad \bullet, \\ \mathbb{S}^1 &= \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \\ \mathbb{S}^2 &= \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \\ &\dots\end{aligned}$$

La donnée d'un morphisme $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow C$ équivaut à la donnée d'une paire (x, y) de $(n-1)$ -flèches parallèles (i.e. $s(x) = s(y)$ et $t(y) = t(x)$) de C .

Toute ω -catégorie C se décompose canoniquement en une tour de “ n -squelettes”

$$C \simeq \varinjlim (\mathrm{sq}_0(C) \rightarrow \mathrm{sq}_1(C) \rightarrow \dots),$$

où chaque $\mathrm{sq}_n(C)$ est la plus grande sous n -catégorie de C .

Définition 4. Une ω -catégorie C est *libre sur un polygraphe* (ou par abus “ C est un polygraphe”) si, pour tout $n \geq 0$, il existe un ensemble Σ_n de n -flèches de C telles que le carré suivant soit cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in \Sigma_n} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\langle s(x), t(x) \rangle} & \text{sq}_{n-1}(C) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{x \in \Sigma_n} \mathbb{D}_n & \xrightarrow{\langle x \rangle} & \text{sq}_n(C), \end{array}$$

où l’on prend par convention $\text{sq}_{-1}(C) = \emptyset$.

Autrement dit, C est libre sur un polygraphe si pour tout n , le n -squelette est obtenu à partir du $(n-1)$ -squelette en attachant librement un ensemble de n -flèches. Intuitivement, les polygraphes sont des analogues ω -catégoriques des CW-complexes.

On a besoin maintenant de la notion de résolution.

Définition 5. Un morphisme de ω -catégories $f: C \rightarrow D$ est une *fibration triviale* si

1. f est surjective sur les objets,
2. pour tout $n > 0$, toute paire de $(n-1)$ -flèches parallèles (x, y) de C , pour toute n -flèche $v: f(x) \rightarrow f(y)$ de D , il existe une n -flèche $u: x \rightarrow y$ de C telle que $f(u) = v$.

Autrement dit, f est une fibration triviale si elle est surjective sur les objets et si elle pleine en toute dimension.

Définition 6. Soit C une ω -catégorie. Une résolution polygraphique est la donnée d’un(e) catégorie libre sur un) polygraphe P et d’une fibration triviale

$$P \rightarrow C.$$

Lemme 3. Toute ω -catégorie admet une résolution polygraphique.

2.3 Abélianisation et homologie polygraphique

On définit un foncteur dit d’“abélianisation”

$$\lambda: \omega\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}$$

défini de la manière suivante. Pour C une ω -catégorie,

$$\lambda_n(C) := \mathbb{Z}C_n / \sim,$$

où $\sim$ est la relation d’équivalence (compatible avec la structure de groupe abélien) engendrée par

$$x *_i y \sim x + y,$$

pour tout $i < n$, dès que l’expression $x *_i y$ a du sens. La différentielle est définie sur les générateurs par la formule

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}(C) &\rightarrow \lambda_n(C) \\ x &\mapsto [t(x)] - [s(x)]. \end{aligned}$$

Dans le cas d’un polygraphe P , le complexe de chaînes $\lambda(P)$ prend une forme particulièrement agréable car on montre le groupe des n -chaînes est le groupe abélien libre sur les n -générateurs du polygraphe

$$\lambda_n(P) \simeq \mathbb{Z}\Sigma_n.$$

(La différentielle a également une formule explicite, que j'ometts ici par souci de concision.)

Soit maintenant C une ω -catégorie et $P \rightarrow C$ une résolution polygraphique. On peut considérer les groupes d'homologie de l'abélianisé de P

$$H_k(\lambda(P)).$$

Le point clé est le résultat suivant.

Proposition 4 (Métayer). *Les groupes d'homologie $H_\bullet(\lambda(P))$ sont indépendants de la résolution polygraphique $P \rightarrow C$.*

Cela permet donc de poser la définition suivante.

Définition 7. Soit C une ω -catégorie. Les groupes d'homologie polygraphiques de C sont définis par

$$H_k^{\text{polg}}(C) := H_k(\lambda(P)),$$

où $P \rightarrow C$ est n'importe quelle résolution polygraphique de C .

2.4 Comparaison avec les définitions standard de l'homologie d'une catégorie

Comme déjà dit précédemment, la catégorie des (petites) catégories se plonge dans la catégorie des ω -catégories,

$$\mathbf{Cat} \rightarrow \omega\mathbf{Cat},$$

et on peut donc en particulier considérer l'homologie polygraphique de C . Notons que ce n'est pas parce que C est concentrée en dimension 0 et 1 (puisque c'est une 1-catégorie), que son homologie polygraphique est concentrée en degré 0 et 1. En effet, une résolution polygraphique de C

$$P \rightarrow C,$$

elle, n'a aucune raison d'être concentrée en degré 0 et 1, et, en général, P a des flèches non-triviales en toute dimension.

De manière plus radicale, le théorème suivant nous dit que l'homologie polygraphique coïncide avec la définition habituelle de l'homologie.

Théorème 5 (Lafont–Métayer, G.). *Pour toute (petite) catégorie C , on a un isomorphisme canonique*

$$H^{\text{polg}}(C) \simeq H(C, \mathbb{Z}).$$

Il est également possible de définir l'homologie polygraphique d'une ω -catégorie C à coefficients “tordus” par un C -module à droite $F: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$, $H^{\text{polg}}(C, F)$, et on a alors le théorème suivant.

Théorème 6 (G.–Maltsiniotis, G.). *Pour toute (petite) catégorie C et tout C -module à droite F , on a un isomorphisme canonique*

$$H^{\text{polg}}(C, F) \simeq H(C, F).$$

Ainsi, l'approche polygraphique pour l'homologie des petites catégories est également valable pour des coefficients généraux², et fournit donc une alternative complète à la définition par l'algèbre homologique.

Le premier intérêt de l'homologie polygraphique par rapport à l'homologie simpliciale peut se résumer par le slogan suivant

²En fait, on peut même étendre le théorème à des coefficients tels que des C -bimodules (homologie de “Hochschild”) ou des systèmes naturels à la Baues–Wirsching.

Slogan. *L'homologie polygraphique est à l'homologie simpliciale ce que l'homologie cellulaire des CW-complexes est à l'homologie singulière des espaces topologiques.*

Ainsi, lorsqu'on dispose d'une présentation de notre catégorie C (de manière analogue au fait de disposer d'une structure de CW-complexe sur un espace topologique), l'homologie polygraphique se calcule via un complexe de chaînes beaucoup plus “petit” que celui donné par l'homologie simpliciale.

Exemple 1. Soit le monoïde $M = (\mathbb{N}, +, 0)$, que l'on voit comme une catégorie à un objet, et donc également comme une ω -catégorie où toutes les flèches de dimension > 1 sont dégénérées. C'est un monoïde libre sur 1-générateur, et donc une ω -catégorie libre. En particulier, il est sa propre résolution polygraphique et le complexe de chaînes $\lambda(M)$ est simplement $\mathbb{Z}$ en degrés 0 et 1. On obtient directement que son homologie polygraphique est

$$H_k^{\text{polg}}(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on passe par l'homologie simpliciale, le complexe de chaînes associé a pour groupe de n -chaînes le groupe abélien libre sur $\mathbb{N}^{\times n}$. Autrement dit, il est énorme! Et même en utilisant le complexe de chaînes réduit, c'est-à-dire en quotientant les simplexes dégénérés, on obtient quand même un groupe abélien libre très gros. Bien sûr en homologie tout disparaît, mais ça demande un argument supplémentaire (qui pourrait être l'équivalence entre l'homologie simpliciale et polygraphique).

2.5 Le cas des groupoïdes, réduire encore la taille des résolutions

Si on reprend l'exemple de la section précédente mais en considérant le groupe $G = (\mathbb{Z}, +, 0)$, que l'on considère également comme une catégorie (en fait un groupoïde) à un objet et donc comme une ω -catégorie dont toutes les flèches de dimension > 1 sont dégénérées. Le groupe G est libre en tant que groupe, mais n'est pas libre en tant que monoïde. Il n'est donc pas libre en tant que ω -catégorie également, et si on veut calculer son homologie polygraphique il faut donc résoudre G , ce qui donnera lieu à un complexe de chaînes non trivial. Pourtant, l'homologie de G est simplement l'homologie d'un $K(\mathbb{Z}, 1)$ qui est bien connue:

$$H_k(G) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, une résolution polygraphique de G comporte beaucoup d'informations inutiles qui disparaissent en homologie, ce qui est un peu ennuyant lorsqu'on cherche à avoir des résolutions les plus petites possibles. Fort heureusement, on peut complètement éliminer ces nuisances.

La définition d' ω -catégorie libre (sur un polygraphe) se transpose immédiatement au cas des ω -groupoïdes, et même au cas des (ω, k) -catégorie pour n'importe quel $k \geq 0$. De même que la définition de fibration triviale.

Définition 8. Soit G un ω -groupoïde, une résolution polygraphique *groupoïdale* de G est la donnée d'un ω -groupoïde P libre (dans $\omega\mathbf{Grpd}$!) et d'une fibration triviale

$$P \rightarrow G.$$

Le point clé étant que le foncteur d'inclusion canonique $\omega\mathbf{Grpd} \rightarrow \omega\mathbf{Cat}$ ne préserve pas les objets libres (mais par contre il préserve et même reflète les fibrations triviales). Ainsi, un ω -groupoïde libre ne sera pas en général libre en tant que ω -catégorie.

Comme dans le cas des ω -catégories, on montre que l'homologie du complexe de chaînes $\lambda(P)$ est indépendant de la résolution polygraphique groupoïdale choisie. On pose donc la définition suivante.

Définition 9. Soit G un ω -groupeïde. On définit l'homologie polygraphique groupeïdale de G par

$$H_k^{\text{pol,grp}}(G) := H_k(\lambda(P)),$$

où $P \rightarrow G$ est n'importe quelle résolution polygraphique groupeïdale de G .

Comme pour les 1-catégories, on montre que pour les 1-groupeïdes, cette définition coïncide avec la définition standard.

Théorème 7 (Métayer–G.). *Soit G un groupeïde. On a un isomorphisme naturel*

$$H(G, \mathbb{Z}) \simeq H^{\text{pol,grp}}(G).$$

Il existe également des versions tordues de ce théorème, que j'ometts par souci de concision.

Notons qu'en conséquence du théorème précédent, on a également un isomorphisme $H^{\text{pol}}(G) \simeq H^{\text{pol,grp}}(G)$. L'avantage de l'homologie polygraphique groupeïdale étant que la taille des résolutions est plus petite.

Exemple 2. Pour $G = (\mathbb{Z}, +, 1)$, c'est un groupe libre et donc un groupeïde libre et donc un ω -groupeïde libre. Il est donc sa propre résolution polygraphique, qui est concentrée en degré 0 et 1, et on retrouve bien que l'homologie de G est $\mathbb{Z}$ en degré 0 et 1.

Pour terminer cette section, notons que pour les 1-catégories, on peut également réduire la taille des résolutions en prenant des résolutions polygraphiques dans les $(\omega, 1)$ -catégories. Tout fonctionne pareil et on peut définir l'homologie $(\omega, 1)$ -polygraphique $H^{\text{pol},(\omega,1)}(C)$ d'une $(\omega, 1)$ -catégorie (et donc en particulier d'une 1-catégorie). On a le théorème suivant.

Théorème 8 (Guiraud–Malbos, Métayer–G.). *Soit C une 1-catégorie C . On a un isomorphisme naturel*

$$H(C, \mathbb{Z}) \simeq H^{\text{pol},(\omega,1)}(C).$$

Comme précédemment, on en déduit que $H^{\text{pol},(\omega,1)}(C) \simeq H^{\text{pol}}(C)$. L'avantage de l'homologie $(\omega, 1)$ -polygraphique est que les techniques de réécriture à la Squier se généralisent pour construire des résolutions $(\omega, 1)$ -polygraphiques de catégories.

3 Homologie des n -catégories pour $n > 1$, limitations de l'homologie polygraphique

La définition donnée précédemment de l'homologie polygraphique ne se limite pas aux (1-)catégories et est valide pour toute ω -catégorie C . Il y a donc deux questions naturelles:

Question 1. Peut-on définir l'homologie d'une ω -catégorie via l'algèbre homologique et via les méthodes simpliciales?

Question 2. Si oui, les définitions polygraphiques, simpliciales et par algèbre homologique sont-elles équivalentes comme pour les cas des 1-catégories?

Pour la première de ces questions, je resterai muet sur l'approche par algèbre homologique, et me concentrerai sur l'approche simpliciale. Cette dernière se généralise aux ω -catégories grâce au nerf ω -catégorique. Ce dernier est défini via un objet co-simplicial, défini par Street,

$$\mathcal{O}: \Delta \rightarrow \omega\mathbf{Cat}.$$

La ω -catégorie $\mathcal{O}_n$ est appelée le n -ième oriental. La définition est combinatoirement assez compliquée, et je me limiterai à forger l'intuition avec les dessins en basse dimension suivants :

$$\mathcal{O}_0 = \bullet,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= \bullet \rightarrow \bullet, \\
\mathcal{O}_2 &= \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \nearrow & \Uparrow & \searrow \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \end{array}, \\
\mathcal{O}_3 &= \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \uparrow & \nearrow & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \uparrow & \nwarrow & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \end{array}
\end{aligned}$$

On définit alors le nerf d'une ω -catégorie C comme l'ensemble simplicial

$$\begin{aligned}
N(C) : \Delta^{\text{op}} &\rightarrow \omega\mathbf{Cat} \\
[n] &\mapsto \text{Hom}_{\omega\mathbf{Cat}}(\mathcal{O}_n, C).
\end{aligned}$$

(Notons que si C est une (1-)catégorie, alors le nerf de C au sens ci-dessus coïncide avec le nerf usuel.)

Aparté: Le foncteur nerf

$$N : \omega\mathbf{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta},$$

permet de montrer que la catégorie des ω -catégories modélise les types d'homotopie. Plus précisément, on définit une classe d'équivalences faibles $\mathcal{W}_{\Delta}$ sur $\omega\mathbf{Cat}$ comme les morphismes $f : C \rightarrow D$ de $\omega\mathbf{Cat}$ tels que $N(f)$ est une équivalence faible d'homotopie, et on montre que la catégorie localisée $\omega\mathbf{Cat}[\mathcal{W}_{\Delta}^{-1}]$ est équivalente à la catégorie des CW-complexes à équivalence d'homotopie près.

Ainsi, il est raisonnable d'appeler *espace classifiant de C* la réalisation topologique du nerf de C et de poser la définition suivante.

Définition 10. Soit C une ω -catégorie. On définit son homologie simpliciale comme étant les groupes d'homologie de son nerf

$$H_{\bullet}^{\text{simp}}(C) := H_{\bullet}(\kappa N(C)).$$

On peut maintenant se tourner vers la question 2: pour une ω -catégorie C , a-t-on un isomorphisme $H^{\text{simp}}(C) \simeq H^{\text{polg}}(C)$? La réponse est **non** en général, comme le montre le contre-exemple suivant.

Considérons B la 2-catégorie librement engendrée par le polygraphe suivant : un unique 0-générateur $\bullet$ et un unique 2-générateur $\alpha : 1_{\bullet} \Rightarrow 1_{\bullet}$.



Cette 2-catégorie est surnommée “la bulle”. Notons également qu'il s'agit simplement du monoïde commutatif $(\mathbb{N}, +, 0)$ vu comme une 2-catégorie monoïdale stricte. Son homologie polygraphique se calcule immédiatement

$$H_k^{\text{polg}}(B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, un résultat non-trivial montre que le type d'homotopie du nerf de B est un $K(\mathbb{Z}, 2)$. En particulier, on a

$$H_k^{\text{simp}}(B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Autrement dit, $H_{2p}^{\text{polg}}(B) \not\simeq H_{2p}^{\text{simp}}(B)$ pour tout $p > 1$.

4 Conjectures

4.1 Retour sur la bulle

Analysons de plus près ce qui se passe avec la “bulle” B . Rappelons pour ça le phénomène de Eckmann-Hilton. Soit C une 2-catégorie, x un objet de C , α et β deux 2-flèches de type

$$\alpha, \beta: 1_x \Rightarrow 1_x.$$

Les axiomes de 2-catégorie (stricte) impliquent que

$$\alpha *_0 \beta = \alpha *_1 \beta = \beta *_0 \alpha.$$

Autrement dit, les opérations $*_0$ et $*_1$ coïncident pour les bulles, et sont automatiquement commutatives.

Revenons maintenant à l’unique générateur α de la bulle B . On a

$$\alpha *_1 \alpha = \alpha *_1 \alpha,$$

mais le point essentiel est que cette égalité est vraie pour *deux* raisons. La première c’est simplement parce que cette égalité est trivialement vraie, et la deuxième est due au phénomène de Eckmann-Hilton. Cette différence est invisible dans le monde des ω -catégories strictes, mais se voit topologiquement dans l’espace classifiant. Intuitivement, ce qu’il manque c’est une 4-flèche non-triviale

$$\begin{array}{ccc} & \xRightarrow{\quad} & \\ 1_{\alpha *_1 \alpha} & \Downarrow & 1_{\alpha *_1 \alpha} \\ & \xRightarrow{\quad} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \equiv \\ \text{(E-H)} \end{array}$$

(où les flèches simples $\rightarrow$ sont des 3-flèches, et la flèche double $\Rightarrow$ est une 4-flèche). C’est cette 4-flèche qui va engendrer un générateur du $H_4^{\text{simp}}(B)$. Cette 4-flèche est elle-même une “bulle”, et le même phénomène va se passer en dimension 6 engendrant un $H_6^{\text{simp}}(B)$ non trivial, le générateur de dimension 6 engendrant un générateur de dimension 8, et ainsi de suite.

4.2 Homologie polygraphique faible

On note $\omega\mathbf{Cat}^{\text{wk}}$ la catégorie des ω -catégories faibles (par exemple au sens des cohérateurs de Grothendieck–Maltsiniotis). On a un foncteur d’inclusion canonique

$$i^*: \omega\mathbf{Cat} \rightarrow \omega\mathbf{Cat}^{\text{wk}},$$

lequel admet un adjoint à gauche $i_!: \omega\mathbf{Cat}^{\text{wk}} \rightarrow \omega\mathbf{Cat}$ qui “écrase” les cohérences.

Les définitions de ω -catégorie libre sur un polygraphe et de fibration triviale se généralisent sans difficulté des ω -catégories strictes aux ω -catégories faibles. On a donc une notion de résolution polygraphique “faible”, c’est-à-dire dans la catégorie $\omega\mathbf{Cat}^{\text{wk}}$. Notons le point essentiel ici, i^* préserve bien les fibrations triviales mais *ne préserve pas les objets cofibrants*. Autrement dit si P est une ω -catégorie libre sur un polygraphe, alors $i^*(P)$ n’est *jamais* libre sur un polygraphe (excepté si $P = \emptyset$.) Ainsi, si

$$P \rightarrow C$$

est une résolution polygraphique (stricte) d’une ω -catégorie stricte C ,

$$i^*(P) \rightarrow i^*(C)$$

n’est pas une résolution polygraphique faible de $i^*(C)$, et il faut prendre une résolution polygraphique faible

$$Q \rightarrow i^*(P) \rightarrow i^*(C).$$

La conjecture principale est la suivante:

Conjecture 9 (Maltsiniotis–G.). *Pour toute ω -catégorie (stricte) C et toute résolution polygraphique faible $Q \rightarrow i^*(C)$ on a un isomorphisme canonique*

$$H^{\text{polg}}(i_!(Q)) \simeq H^{\text{simp}}(C).$$

4.3 Homologie polygraphique semi-stricte

Par rapport à l'exemple de la bulle, il semble un peu radical de devoir passer aux ω -catégories faibles pour attraper la bonne homologie (i.e. celle de l'espace classifiant). Après tout, le problème semblait uniquement venir de la loi d'échange pour la $*_0$ -composition, et on peut donc se demander s'il ne suffirait pas de prendre des résolutions dans des ω -catégories semi-strictes où on a uniquement affaibli la loi d'échange. Notons que cela serait cohérent avec le cas des 1-catégories où il *suffit* de prendre des résolutions dans les ω -catégories strictes (ou mieux encore: des $(\omega, 1)$ -catégories strictes).

Une telle définition de ω -catégories semi-strictes, où seule la loi d'échange pour la $*_0$ composition est affaiblie, existe sous le nom de *ω -catégories de Gray*. Il s'agit des catégories enrichies en la catégorie des ω -catégories strictes munie du produit tensoriel de Gray.

Comme pour les ω -catégories faibles, on a un couple de foncteurs adjoints

$$i^*: \omega\mathbf{Cat} \rightleftarrows \omega\mathbf{Cat}^{\text{Gray}}: i_!$$

Conjecture 10. *Pour toute 2-catégorie (stricte) et toute résolution polygraphique $P \rightarrow i^*(C)$ dans la catégorie des ω -catégories de Gray, on a un isomorphisme canonique*

$$H^{\text{polg}}(i_!(P)) \simeq H^{\text{simp}}(C).$$

5 Quelques références

Théorie des ω -catégories et des polygraphes

- [3] Yves Lafont, François Métayer, and Krzysztof Worytkiewicz. “A Folk Model Structure on Omega-Cat”. In: *Advances in Mathematics* 224.3 (2010), pp. 1183–1231.
- [7] Dimitri Ara et al. *Polygraphs : from Rewriting to Higher Categories*. Vol. 495. London Mathematical Society Lecture Notes Series. Cambridge University Press, 2025.

Homologie polygraphique à coefficients constants

- [1] François Métayer. “Resolutions by Polygraphs”. In: *Theory and Applications of Categories* 11.7 (2003). <http://www.tac.mta.ca/tac/>, pp. 148–184.
- [2] Yves Lafont and François Métayer. “Polygraphic Resolutions and Homology of Monoids”. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 213 (2009), pp. 947–968.
- [5] Léonard Guetta. “Homology of categories via polygraphic resolutions”. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 225.10 (2021).
- [9] Léonard Guetta and François Métayer. “Discrete Concuché fibrations and polygraphic homology for groupoids”. En préparation, disponible bientôt (titre non définitif). 2026.

Homologie polygraphique à coefficients tordus

- [6] Léonard Guetta and Georges Maltsiniotis. “Homologie polygraphique des systèmes locaux”. In: *Advances in Mathematics* 448 (2024).
- [8] Léonard Guetta. “Polygraphic homology with general twisted coefficients”. En cours d'écriture (titre non définitif). 2026.

ω -catégories comme modèles des types d'homotopie

- [4] Andrea Gagna. “Strict n -categories and augmented directed complexes model homotopy types”. In: *Advances in Mathematics* 331 (2018), pp. 542–564.